1. In der Leichtathletik werden Eisenkugeln mit Gewichten von 4 kg bei den Frauen und 7.25 kg bei den Männern benutzt. Welchen Durchmesser haben die beiden Kugeln? Die Dichte von Eisen beträgt 7.874 kg/dm3.

1. Frauen: $\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\text{umformen}} V = \frac{m}{\rho} = \frac{4\,kg}{7.874\,\frac{kg}{dm^3}} \approx 0.51\,dm^3$

$V_{Kugel} = \frac{4\pi r^3}{3} \xrightarrow{\text{umformen}} r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.51\,dm^3}{4\pi}} \approx 0.49\,dm$

$d = 2 \cdot r = 2 \cdot 0.49\,dm \approx 0.99\,dm$

Die Kugel der Frauen hat einen Durchmesser von ca. 1dm.

Herren: $\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\text{umformen}} V = \frac{m}{\rho} = \frac{7.25\,kg}{7.874\,\frac{kg}{dm^3}} \approx 0.92\,dm^3$

$V_{Kugel} = \frac{4\pi r^3}{3} \xrightarrow{\text{umformen}} r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.92\,dm^3}{4\pi}} \approx 0.60\,dm$

$d = 2 \cdot r = 2 \cdot 0.60\,dm \approx 1.21\,dm$

Die Kugel der Frauen hat einen Durchmesser von ca. 1.21dm.

2. Ein Stehaufmännchen hat die Form einer Halbkugel mit aufgesetztem Kegel.
   a) Bestimme Volumen und Oberfläche des Körpers, wenn die Halbkugel einen Radius von 4 cm und der Kegel eine Höhe von 8 cm hat.
   b) Wie hoch müsste der Kegel sein, damit er die gleiche Mantelfläche wie die Halbkugel hat?

2a)

$V = {}_{Halbkugel} + V_{Kegel}$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi (4\,cm)^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot (4\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 8\,cm$

$V = 134.04\,cm^3 + 134.04\,cm^3$ (Die Volumen sind gleich.)

$V \approx 268.08\,cm^3$

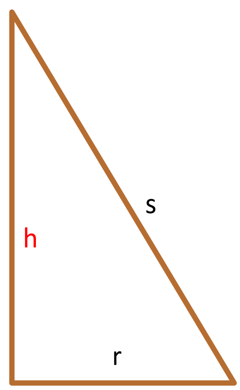
2b)

$M_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (4\,cm)^2 = 32 \cdot \pi\,cm^2 \approx 100.53\,cm^2$

$S_{Kegel} = \pi \cdot r \cdot s \xrightarrow{\text{umformen}} s = \frac{S_{Kegel}}{\pi \cdot r} = \frac{32\,cm^2 \cdot \cancel{\pi}}{\cancel{\pi} \cdot 4\,cm} = 8\,cm$

$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(8\,cm)^2 - (4\,cm)^2} \approx 6.93\,cm$

Die Kegelhöhe misst etwa 6.93cm.



3. Um wie viele Prozent verändert sich die Oberfläche einer Kugel, wenn sich …
a) … der Radius um 10 % vergrössert?
b) … das Volumen um 27 % vergrössert?

3a) Rasche Rechnung mit Ähnlichkeitsfaktor!

$$\begin{aligned} A' &= k^2 \cdot A \\ k &= 1.1 \\ A' &= 1.1^2 \cdot A \\ A' &= 1.21 \cdot A \qquad \text{Zunahme}: +21\% \end{aligned}$$

rechnerisch mit beliebigem Radius

$$r_{alt} = 1\,cm \qquad S = 4\pi r^2 = 4\pi(1\,cm)^2 = 4\pi\,cm^2$$

$$r_{neu} = 1.1\,cm \qquad S = 4\pi r^2 = 4\pi(1.1\,cm)^2 = 4.84\,\pi\,cm^2$$

$$\text{in \%: } \frac{4.84\,\pi\,cm^2}{4\pi\,cm^2} \cdot 100\% = 121\%$$

Die Zunahme der Oberfläche ist 21%.

3b) Rasche Rechnung mit Ähnlichkeitsfaktor!

$$V' = 1.27 \cdot V$$

$$V' = k^3 \cdot V$$

$$k = \sqrt[3]{1.27} \approx 1.08$$

Der Radius ist also von 1 auf 1.08 gewachsen, also $+8\%$.

Die Oberfläche wird um k^2 grösser, also um $(1.08)^2 \approx 1.17$.

Die Oberfläche wächst um ca. 17.27%.

rechnerisch mit beliebigem Volumen

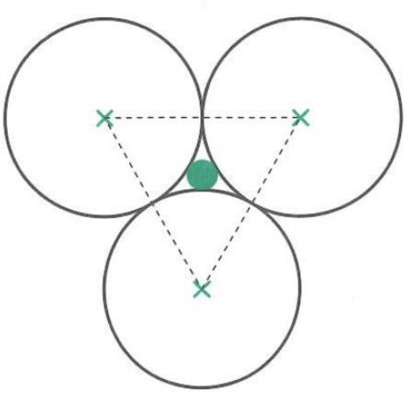
$$\begin{aligned} V_{alt} & & &= 1'000\,cm^2 \\ r_{alt} &= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{alt}}{4 \cdot \pi}} & &\approx 6.20\,cm \\ S_{alt} &= 4\pi(r_{alt})^2 & &\approx 483.60\,cm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{neu} &= 1000\,cm^2 \cdot 1.27 & &= 1270\,cm^3 \\ r_{neu} &= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{neu}}{4 \cdot \pi}} & &\approx 6.72\,cm \\ S_{neu} &= 4\pi(r_{neu})^2 & &\approx 567.14\,cm^2 \end{aligned}$$

$$\text{in \%: } \frac{S_{neu}}{S_{alt}} \cdot 100\% = \frac{567.14\,cm^2}{483.60\,cm^2} \cdot 100\% \approx 117.27\%$$

Die Oberfläche nimmt um ca. 17.27 % zu.

4. In einer Kiste liegen drei gleich grosse Kugeln mit einem Radius von 5 cm so, dass sie sich berühren und ihre Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Steffi packt in die Mitte eine vierte Kugel, die gerade zwischen den drei Kugeln durchrutscht.
Berechne den maximalen Radius der letzten Kugel.



4. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck kann man berechnen.

$$h = \frac{s\sqrt{3}}{2} = \frac{10\,cm \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 8.66\,cm$$

Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen, die Schwerlinien und die Winkelhalbierenden identisch. Sie schneiden sich im Schwerpunkt.
Sie schneiden sich im Verhältnis 2:1.
Der Schwerpunkt, also der Mittelpunkt des kleinen Balls, ist $\frac{2}{3}$ von der Ecke, also $\frac{2}{3} \cdot 8.66\,cm \approx 5.77\,cm$ von der Ecke entfernt.
Der Ball berührt die grosse Kugel, die 5 cm Radius hat.
$5.77\,cm - 5\,cm = 0.77\,cm$
Der maximale Radius der kleinen Kugel misst also 0.77 cm.