

Matheprüfung Kapitel 2b & 2c Gruppe A Lösungsvorschlag

1. Notiere die Zahlen mit einer Zehnerpotenz, sodass vor dem Dezimalpunkt nur eine Ziffer steht, die nicht Null ist. [2]

- a) $415'000 = 4.15 \cdot 10^5$
 b) 6 Milliarden = $6 \cdot 10^9$
 c) $111'000'000 = 1.11 \cdot 10^8$
 d) 600 Megatonnen = $600 \cdot 1'000'000 \text{ t} = 600'000'000 \text{ t} = 6 \cdot 10^8 \text{ t}$

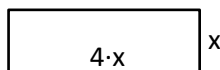
2. Schreibe die gegebenen Zahlen in Ziffern. [2]

- a) viermillionenzweiundzwanzigtausendundelf = $4'022'011$
 b) 3 Giga = $3'000'000'000$
 c) $2.8 \cdot 10^5 = 280'000$
 d) 4 Milliarden = $4'000'000'000$

3. Terme [5]

- a) Die Breite eines Rechtecks misst x . Die Länge ist viermal so gross wie die Breite.

- a₁ Erstelle einen Term für den Umfang des Rechtecks und vereinfache ihn.



Umfang: $x + 4 \cdot x + x + 4 \cdot x = 10 \cdot x$

- a₂ Erstelle einen Term für die Fläche des Rechtecks. Fläche: $x \cdot 4x = 4x^2$

- b) In Sack A hat es z Kugeln.

In Sack B hat es zehn Kugeln mehr als in Sack A.

In Sack C hat es fünf Kugeln weniger als in Sack B.

- b₁ Erstelle einen Term für die Säcke B und C.

Sack A: z Kugeln

Sack B: $z + 10$ Kugeln

Sack C: $z + 10 - 5 = z + 5$ Kugeln

- b₂ Erstelle einen Term für die totale Anzahl der Kugeln und vereinfache ihn.

Total: $z + z + 10 + z + 5 = 3z + 15$ Kugeln

- c) Schreibe den Term ohne Klammern und fasse ihn nach den Regeln so weit wie möglich zusammen:

$6x - (5x - 10y) + 2 \cdot (x - 3y)$

$= 6x - 5x + 10y + 2x - 6y = 6x - 5x + 2x + 10y - 6y = 3x + 4y$

- d) Setze im Term $x^2 - 5x + 21$ nacheinander die Zahlen 5 und 12 ein und berechne ihn.

$T(x = 5) = 5^2 - 5 \cdot 5 + 21 = 25 - 25 + 21 = 21$

$T(x = 12) = 12^2 - 5 \cdot 12 + 21 = 144 - 60 + 21 = 165 - 60 = 105$

4. Christian Goldbach (1690 – 1764) fand heraus: [2]

„Jede gerade Zahl grösser als 2 kann als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden.“

Zeige, dass diese Aussage für die Zahlen 22 und 34 gilt.

Es kann mehrere Lösungen für eine Zahl geben. $22 = 19 + 3$ oder $22 = 11 + 11$
 $34 = 29 + 5$ oder $34 = 23 + 11$

5. Zeige rechnerisch, ob die Zahl 28 reich, arm oder vollkommen ist. [2]

$T_{28} = 1, \del{28}, 2, 14, 4, 7$ Die Zahl selbst wird gestrichen.

$1 + 2 + 14 + 4 + 7 = 28$ Die Summe ist gleich gross wie die Zahl. Sie ist daher vollkommen.

6. a) Vervollständige die Tabelle. Den Platz rechts kannst du für Ausrechnungen brauchen. [2]

	27	135	775	3375
	9	45	225	1125
	3	15	75	375
• 3	1	5	25	125
				• 5

- b) Gib die Primfaktorenzerlegung der Zahl oben rechts im Gitter an.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Das kann man direkt aus dem Gitter ablesen, wenn unten links die 1 ist.

7. a) Bestimme den ggT(135, 315) mithilfe der T-Methode. [4]

- b) Bestimme das kgV(180, 300) mithilfe der T-Methode.

a)

135	
5	27
3	9
3	3
3	1

315	
5	63
3	21
3	7
7	1

$ggT(135, 315) = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$

b)

180	
2	90
2	45
3	15
3	5
5	1

300	
2	150
2	75
3	25
5	5
5	1

$kgV(180, 300) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 100 \cdot 9 = 900$

8. Herr Snorre schnarcht alle 40 Sekunden furchtbar laut. Frau Snorre zwickt ihren Mann alle **fünf Minuten**, damit er aufhört zu schnarchen. Seine Nachbarin schlägt alle 90 Sekunden mit dem Besen an die Decke, um ihn zu wecken. Um 24 Uhr geschehen die drei Dinge gleichzeitig. Wie lange dauert es, bis die drei Dinge das nächste Mal gleichzeitig geschehen? [3]

Gesucht ist das kgV von 40, 90 und 300 Sekunden.

40		
2	20	15
2	10	5
2	5	1
5	1	

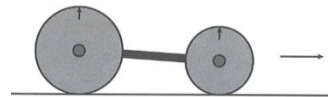
90		
2	45	15
3	15	5
3	5	1
5	1	

300		
2	150	75
2	75	25
3	25	5
5	5	1
5	1	

$$\text{kgV}(40,90,300) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 8 \cdot 9 \cdot 25 = 200 \cdot 9 = 1800 \text{ Sek}$$

Nach 1800 Sekunden = 30 Minuten passieren die drei Dinge wieder gemeinsam. Es ist dann halb ein Uhr morgens.

9. Das Hinterrad eines Fahrzeuges hat einen Umfang von **1.50 m**. Das Vorderrad hat einen Umfang von 45 cm. [3]
- a) Wie weit muss das Fahrzeug rollen, bis die markierten Stellen der Räder wieder in der gleichen Position sind wie beim Start?
- b) Wie oft dreht sich dabei das Hinterrad??



Gesucht ist das kgV von 150 cm und 45 cm.

45		
3	15	5
3	5	1
5	1	

150		
2	75	25
3	25	5
5	5	1
5	1	

$$\text{kgV}(45,150) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 9 \cdot 25 = 50 \cdot 9 = 450 \text{ cm}$$

Das Fahrzeug muss 450 cm weit rollen, damit wieder die Startposition erreicht wird. Das Hinterrad dreht sich dabei $450 \text{ cm} : 150 \text{ cm} = 3$ -mal.

10. Bei der folgenden Zahl fehlt die letzte Ziffer. $96'085'16 \boxed{?}$ [3]
Welche Ziffern kann man für das „?“ einsetzen, damit die

- Zahl durch 2 teilbar ist?

Die letzte Ziffer muss gerade sein. Also kann man 0, 2, 4, 6 oder 8 einsetzen.

- Zahl durch 3 teilbar ist?

Die Quersumme muss eine Dreierzahl sein.

$$\text{Quersumme}_{96'085'16} = 9 + 6 + 0 + 8 + 5 + 1 + 6 = 35$$

$$\text{Quersumme}_{35} = 3 + 5 = 8$$

Um eine Dreierzahl zu erreichen, kann man die 1, die 4 oder die 7 einsetzen.

- Zahl durch 9 teilbar ist?

Die Quersumme muss eine Neunerzahl sein.

$$\text{Quersumme}_{96'085'16} = 9 + 6 + 0 + 8 + 5 + 1 + 6 = 35$$

$$\text{Quersumme}_{35} = 3 + 5 = 8$$

Um eine Neunerzahl zu erreichen, kann man nur die 1 einsetzen.

- Zahl durch 8 teilbar ist?
**Die Zahl aus den hintersten drei Ziffern muss eine Achterzahl sein.
160 und 168 sind Achterzahlen. Also kann man eine 0 oder ein e 8 einsetzen.**
- Zahl durch 5 teilbar ist?
Die hinterste Ziffer muss ein 0 oder eine 5 sein.

11. Ist die Zahl 16'179'625 teilbar durch 11? Beantworte die Frage mithilfe der Teilungsregel. [2]

Die Differenz der alternierenden Summe muss eine Elferzahl sein. Dann ist die Zahl durch 11 teilbar, sonst nicht.

$$1 + 1 + 9 + 2 = 13 \qquad 6 + 7 + 6 + 5 = 24$$

$24 - 13 = 11$, also ein V_{11} . Die Zahl ist durch 11 teilbar.

12. Richtig (R) oder falsch (F)? [4]

- Primzahlen sind immer reiche Zahlen.**
Falsch. Die Summe der Teiler ist immer eins. Primzahlen sind immer arm.
- Wenn zwei Zahlen teilerfremd sind, sind es automatisch Primzahlen.**
Falsch. 3 und 10 sind teilerfremd, aber die 10 ist keine Primzahl.
- $\text{ggT}(a,b) \cdot \text{kgV}(a,b) = a \cdot b$**
Richtig. Das haben wir in einer Aufgabe im AH festgestellt.
- Wenn eine Zahl durch 5 und 20 teilbar ist, dann ist sie auch durch 100 teilbar.**
Falsch. 5 und 10 sind nicht teilerfremd!
- Primzahlen haben immer eine gerade Anzahl Teiler.**
Richtig. Sie haben ja nur die eins und sich selber als Teiler.
- Der kgV von teilerfremden Zahlen ist immer die Zahl 1.**
Falsch. Der ggT von teilerfremden Zahlen ist immer die Zahl 1.
- 1 ist die kleinste Primzahl.**
Falsch. Die 2 ist die kleinst Primzahl.
- Ist eine Zahl durch 3 und 7 teilbar, so ist sie auch durch 21 teilbar.**
Richtig. 3 und 7 sind teilerfremd!

Matheprüfung Kapitel 2b & 2c Gruppe B Lösungsvorschlag

1. Notiere die Zahlen mit einer Zehnerpotenz, sodass vor dem Dezimalpunkt nur eine Ziffer steht, die nicht Null ist. [2]

- a) 500'000 = $5 \cdot 10^5$
 b) 42 Millionen = $42'000'000 = 4.2 \cdot 10^7$
 c) 123'000'000'000 = $1.23 \cdot 10^{11}$
 d) 400 Kilofranken = $400 \cdot 1000 \text{ Fr} = 400'000 \text{ Fr} = 4 \cdot 10^5$

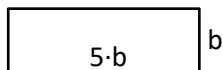
2. Schreibe die gegebenen Zahlen in Ziffern. [2]

- a) achtmillionendreizehntausendundvier = $8'013'004$
 b) 21 Mega = $21'000'000$
 c) $4.1 \cdot 10^7 = 41'000'000$
 d) 11 Milliarden = $11'000'000'000$

3. Terme [5]

- a) Die Breite eines Rechtecks misst b . Die Länge ist fünfmal so gross wie die Breite.

- a₁ Erstelle einen Term für den Umfang des Rechtecks und vereinfache ihn.



Umfang: $b + 5 \cdot b + b + 5 \cdot b = 12b$

- a₂ Erstelle einen Term für die Fläche des Rechtecks. Fläche: $b \cdot 5b = 5b^2$

- b) In Sack A hat es x Kugeln.

In Sack B hat es doppelt so viele Kugeln als in Sack A.

In Sack C hat es fünf Kugeln mehr als in Sack A.

- b₁ Erstelle einen Term für die Säcke B und C.

Sack A: x Kugeln

Sack B: $2 \cdot x$ Kugeln

Sack C: $x + 5$ Kugeln

- b₂ Erstelle einen Term für die totale Anzahl der Kugeln und vereinfache ihn.

Total: $x + 2x + x + 5 = 4x + 5$ Kugeln

- c) Schreibe den Term ohne Klammern und fasse ihn nach den Regeln so weit wie möglich zusammen:

$$13a + 3 \cdot (a - 2b) - (7a - 12b)$$

$$= 13a + 3a - 6b - 7a + 12b = 9a + 6b$$

- d) Setze im Term $x^2 - 5x + 21$ nacheinander die Zahlen 7 und 11 ein und berechne ihn.

$$T(x = 7) = 7^2 - 5 \cdot 7 + 21 = 49 - 35 + 21 = 70 - 35 = 35$$

$$T(x = 11) = 11^2 - 5 \cdot 11 + 21 = 121 - 55 + 21 = 142 - 55 = 87$$

4. Christian Goldbach (1690 – 1764) fand heraus: [2]

„Jede gerade Zahl grösser als 2 kann als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden.“

Zeige, dass diese Aussage für die Zahlen 24 und 32 gilt.

Es kann mehrere Lösungen für eine Zahl geben. $24 = 13 + 11$ oder $24 = 17 + 7$
 $32 = 29 + 3$ oder $32 = 19 + 13$

5. Zeige rechnerisch, ob die Zahl 32 reich, arm oder vollkommen ist. [2]

$T_{32} = 1, \cancel{2}, 16, 4, 8$ Die Zahl selbst wird gestrichen.

$1 + 2 + 16 + 4 + 8 = 31$ Die Summe ist kleiner als die Zahl. Sie ist daher arm.

6. a) Vervollständige die Tabelle. Den Platz rechts kannst du für Ausrechnungen brauchen. [2]

27	135	775	3375
9	45	225	1125
3	15	75	375
1	5	25	125

- b) Gib die Primfaktorenzerlegung der Zahl oberhalb der 225 an.

$$775 = 5^2 \cdot 3^3$$

Das kann man direkt aus dem Gitter ablesen, wenn unten links die 1 ist.

7. a) Bestimme den ggT(270, 315) mithilfe der T-Methode. [4]

a)

270	
3	90
3	30
3	10
2	5
5	1

315	
3	105
3	35
5	7
7	1

$$\text{ggT}(270, 315) = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

b)

180	
2	90
3	30
3	10
2	5
5	1

450	
2	225
5	45
5	9
3	3
3	1

$$\text{kgV}(180, 450) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 100 \cdot 9 = 900$$

8. Herr Snorre schnarcht alle 40 Sekunden furchtbar laut. Frau Snorre zwickt ihren Mann alle **fünf Minuten**, damit er aufhört zu schnarchen. Seine Nachbarin schlägt alle 90 Sekunden mit dem Besen an die Decke, um ihn zu wecken. Um 0100 Uhr geschehen die drei Dinge gleichzeitig. Wie lange dauert es, bis die drei Dinge das nächste Mal gleichzeitig geschehen? [3]

Gesucht ist das kgV von 40, 90 und 300 Sekunden.

40	
2	20
2	10
2	5
5	1

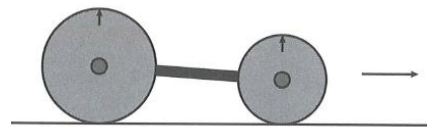
90	
2	45
3	15
3	5
5	1

300	
2	150
2	75
3	25
5	5
5	1

$$\text{kgV}(40,90,300) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 8 \cdot 9 \cdot 25 = 200 \cdot 9 = 1800 \text{ Sek}$$

Nach 1800 Sekunden = 30 Minuten passieren die drei Dinge wieder gemeinsam. Es ist dann halb zwei Uhr morgens.

9. Das Hinterrad eines Fahrzeuges hat einen Umfang von **1.20** m. Das Vorderrad hat einen Umfang von 45 cm. [3]
- a) Wie weit muss das Fahrzeug rollen, bis die markierten Stellen der Räder wieder in der gleichen Position sind wie beim Start?
- b) Wie oft dreht sich dabei das Vorderrad?



Gesucht ist das kgV von 120 cm und 45 cm.

45	
3	15
3	5
5	1

120	
2	60
2	30
2	15
3	5
5	1

$$\text{kgV}(45,120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 40 \cdot 9 = 360 \text{ cm}$$

Das Fahrzeug muss 360 cm weit rollen, damit wieder die Startposition erreicht wird. Das Hinterrad dreht sich dabei $360 \text{ cm} : 45 \text{ cm} = 8$ -mal.

10. Bei der folgenden Zahl fehlt die letzte Ziffer. $46'271'24\boxed{?}$ [3]

Welche Ziffern kann man für das „?“ einsetzen, damit die

- Zahl durch 9 teilbar ist?

Die Quersumme muss eine Neunerzahl sein.

$$\text{Quersumme}_{46'271'24} = 4 + 6 + 2 + 7 + 1 + 2 + 4 = 26$$

$$\text{Quersumme}_{26} = 2 + 6 = 8$$

Um eine Neunerzahl zu erreichen, kann man nur die 1 einsetzen.

- Zahl durch 5 teilbar ist?

Die hinterste Ziffer muss ein 0 oder eine 5 sein.

- Zahl durch 8 teilbar ist?

Die Zahl aus den hintersten drei Ziffern muss eine Achterzahl sein.

240 und 248 sind Achterzahlen. Also kann man eine 0 oder ein e 8 einsetzen.

- Zahl durch 2 teilbar ist?
Die letzte Ziffer muss gerade sein. Also kann man 0, 2, 4, 6 oder 8 einsetzen.
- Zahl durch 3 teilbar ist? Die Quersumme muss eine Dreierzahl sein.
Die Quersumme muss eine Dreierzahl sein.

$$\text{Quersumme}_{46'271'24} = 4 + 6 + 2 + 7 + 1 + 2 + 4 = 26$$

$$\text{Quersumme}_{26} = 2 + 6 = 8$$
Um eine Dreierzahl zu erreichen, kann man die 1, die 4 oder die 7 einsetzen.

11. Ist die Zahl 16'279'625 teilbar durch 11? Beantworte die Frage mithilfe der Teilungsregel. [2]

Die Differenz der alternierenden Summe muss eine Elferzahl sein. Dann ist die Zahl durch 11 teilbar, sonst nicht.

$$1 + 2 + 9 + 2 = 14 \qquad 6 + 7 + 6 + 5 = 24$$

$24 - 14 = 10$, also kein V_{11} . Die Zahl ist nicht durch 11 teilbar.

12. Richtig (R) oder falsch (F)? [4]

a) Primzahlen sind nie reiche Zahlen.

Richtig. Primzahlen sind immer arm.

b) Wenn zwei Zahlen teilerfremd sind, sind es automatisch Primzahlen.

Falsch. 3 und 10 sind teilerfremd, aber die 10 ist keine Primzahl.

c) $c \cdot d = \text{ggT}(c,d) \cdot \text{kgV}(c,d)$

Richtig. Das haben wir in einer Aufgabe im AH festgestellt.

d) Wenn eine Zahl durch 6 und 30 teilbar ist, dann ist sie auch durch 180 teilbar.

Falsch. 6 und 50 sind nicht teilerfremd!

e) Primzahlen haben immer eine ungerade Anzahl Teiler.

Falsch. Primzahlen haben immer zwei Teiler.

f) Der kgV von teilerfremden Zahlen ist immer die Zahl 1.

Falsch. Der ggT von teilerfremden Zahlen ist immer die Zahl 1.

g) 1 ist keine Primzahl.

Richtig. Die kleinste Primzahl ist die 2.

h) Ist eine Zahl durch 4 und 7 teilbar, so ist sie auch durch 28 teilbar.

Richtig. 4 und 7 sind teilerfremd!