Exponentielle Zuordnungen - Wachstum und Zerfall - Lösungsvorschlag

Hilfestellung:	Startgrösse:	s
	Wachstumsfaktor:	q
	Anzahl der Veränderungen:	x
	Formel:	$\mathbf{y = s \cdot q^x}$
	Einsetzen und berechnen.	

1. Eine Frucht wiegt 150 g. Bis zur Reife verdoppelt sie jede Woche ihr Gewicht.
   a) Berechne das Gewicht nach 5 Wochen.
   b) Nach wie vielen Wochen ist sie schwerer als 10 kg?

Anfangswert: 150g oder 0.15kg

Wachstumsfaktor: $\cdot 2$

Formel: $y = 0.15 \cdot 2^x$

a) $y_5 = 0.15 \cdot 2^5 = 4.8$ Nach 5 Wochen wiegt die Frucht 4.8kg.

b) Probieren und x einsetzen!

$x = 6 \longrightarrow y = 9.6\,\text{kg}$

$x = 7 \longrightarrow y = 19.2\,\text{kg}$

Nach 7 Wochen hat sich das Gewicht die 10kg überschritten.

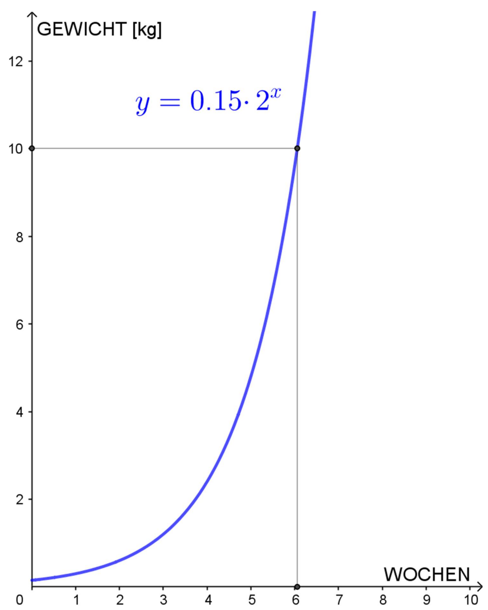
Mit Logarithmus:

$$10 = 0.15 \cdot 2^x \quad |:0.15$$

$$66\frac{2}{3} = 2^x \quad |\log$$

$$\log\left(66\frac{2}{3}\right) = x \cdot \log(2) \quad |:\log(2)$$

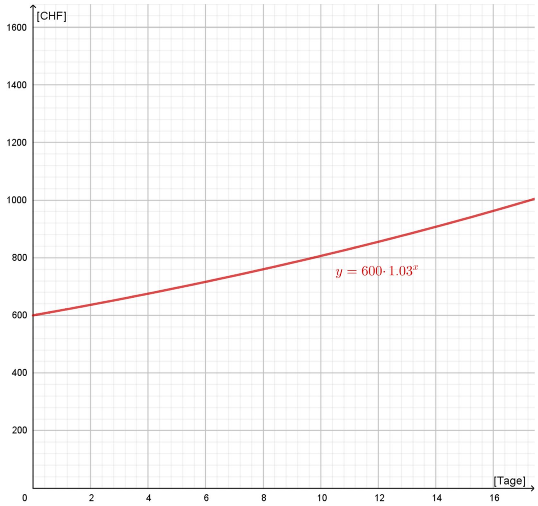
$$\frac{\log\left(66\frac{2}{3}\right)}{\log(2)} = x \approx 6.06 \longrightarrow$$ Nach 7 Wochen hat sich das Gewicht die 10kg überschritten.



2. Die Mieten für Wohnraum steigen jährlich um durchschnittlich 3%. Berechne die Miete für eine Wohnung nach 5 Jahren, wenn sie heute SFR 600 kostet.

Anfangswert:	600 CHF
Wachstumsfaktor:	$\cdot 1.03$
Formel:	$y = 600 \cdot 1.03^x$

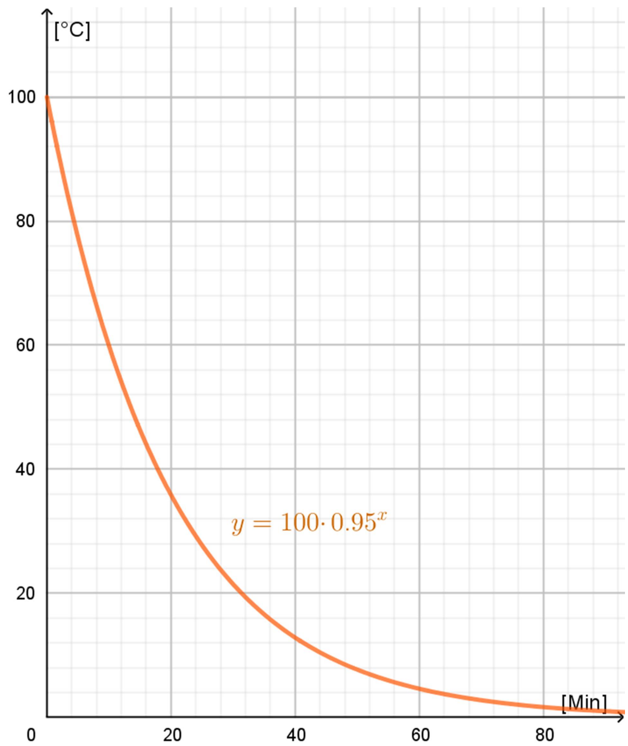
$y_5 = 600 \cdot 1.03^x \approx 695.56$ Nach 5 Jahren beträgt die Miete etwa 695.55 CHF.



3. Ein Topf mit kochendem Wasser wird vom Herd genommen. Die Temperatur sinkt pro Minute um 5%. Wie hoch ist die Wassertemperatur nach 20 Minuten?

Anfangswert:	100° Celsius
Wachstumsfaktor:	$\cdot 0.95$
Formel:	$y = 100 \cdot 0.95^x$

$y_{20} = 100 \cdot 0.95^{20} \approx 35.85$ Nach 20 Minuten beträgt die Temperatur etwa 36° Celsius.



4. Ein Auto verliert jedes Jahr 18% vom Wert des Vorjahres. Ein Porsche kostet neu 120 kFr.
   a) Wie viel ist das Auto nach 3 Jahren noch wert?
   b) Nach wie vielen Jahren ist es weniger als ein Viertel vom Anfangspreis wert?

Anfangswert:	120'000 CHF
Wachstumsfaktor:	$\cdot 0.82$
Formel:	$y = 120'000 \cdot 0.82^x$

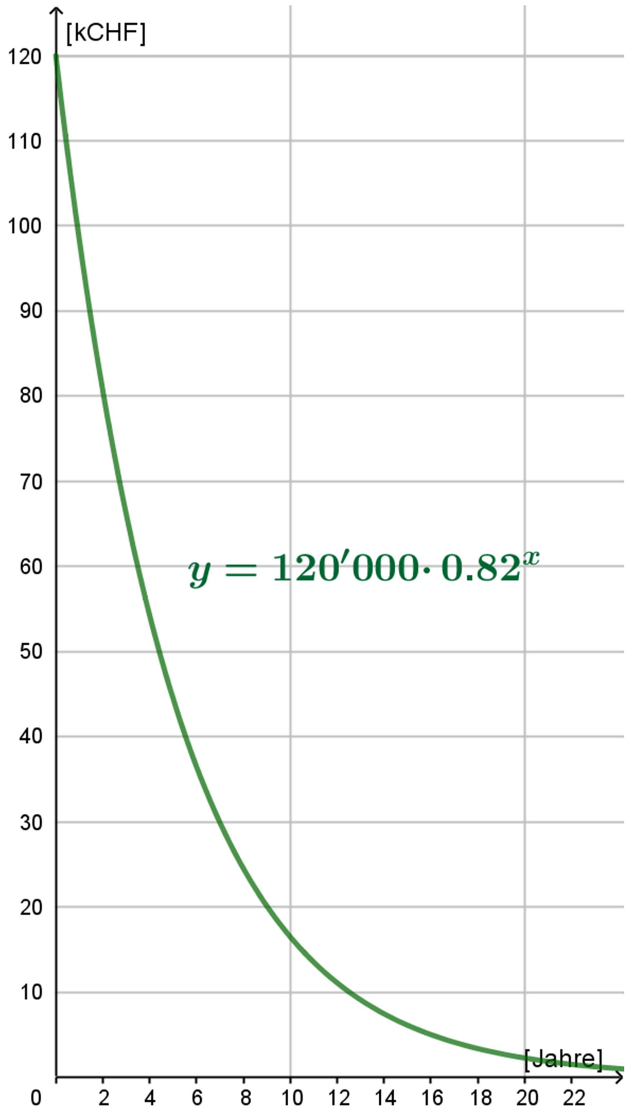
a) $y_3 = 120'000 \cdot 0.82^3 \approx 66'164.16$ Nach 3 Jahren ist das Auto noch etwa 66'164 CHF wert.

b) Probieren! $\longrightarrow$ Nach 7 Jahren ist der Wert unter 30'000 CHF gefallen.

Mit Logarithmus:

$$
\begin{aligned}
30'000 &= 120'000 \cdot 0.82^x && |:120'000 \\
0.25 &= 0.82^x && |\log \\
\log(0.25) &= x \cdot \log(0.82) && |:\log(0.82) \\
\frac{\log(0.25)}{\log(0.82)} &= x \approx 6.99 && \longrightarrow
\end{aligned}
$$

Nach 7 Jahren ist der Wert unter 30'000 CHF gefallen.

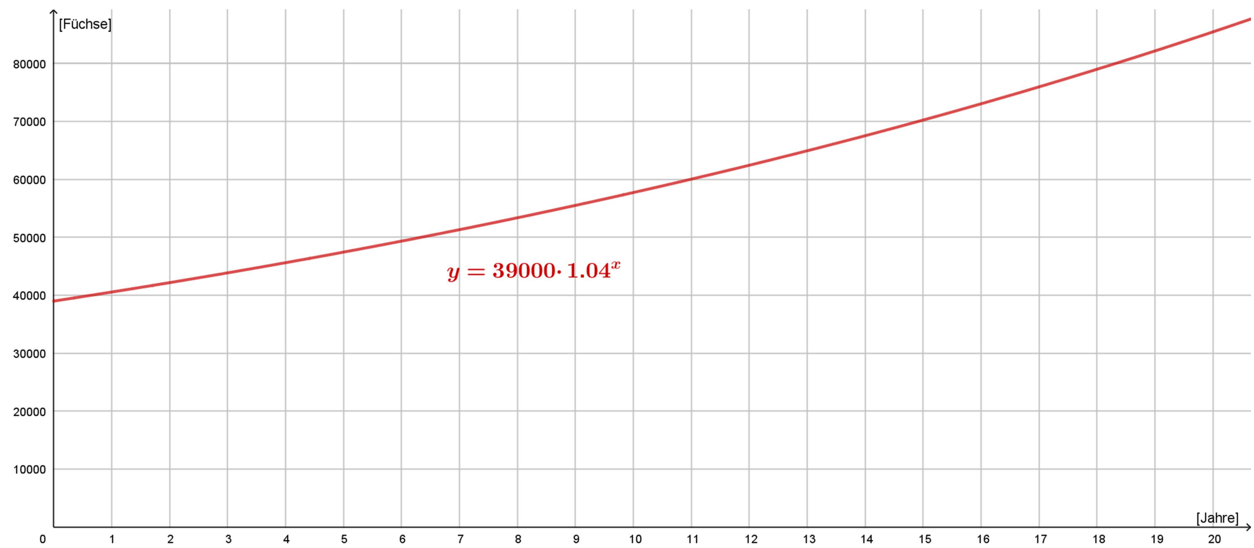


5. In der Schweiz wurden im Jahre 2010 39’000 Füchse erlegt. Jedes Jahr werden 4% mehr Füchse erlegt als im Vorjahr.
   a) Funktionsgleichung und Wachstumsart?
   b) Berechne die erlegten Füchse in den Jahren 2020 und 2030. Runde jeweils auf ganze Füchse auf.
   c) Finde heraus, nach wie vielen Jahren sich die erlegte Zahl verdoppelt hat.

x [Jahre]	2010	2020	2030
y [erlegte Füchse]	39'000	**57‘730**	**85‘454**

Anfangswert: 39'000 Füchse
Wachstumsfaktor: $\cdot 1.04$
Formel: $y = 39'000 \cdot 1.04^x$

a) $y_{10} = 39'000 \cdot 1.04^{10} \approx 57'730$ 2020 erlegt man etwas 57'730 Füchse.
b) $y_{20} = 39'000 \cdot 1.04^{20} \approx 85.454$ 2030 erlegt man etwas 85'454 Füchse.



6. Simon hat eine Schuld von 25'000 Franken. Jedes Jahr zahlt er 2% vom Restbetrag zurück.
   a) Funktionsgleichung und Wachstumsart?
   b) Berechne die Restschuld nach 11 Jahren.
   c) Berechne die Restschuld nach 50 Jahren.

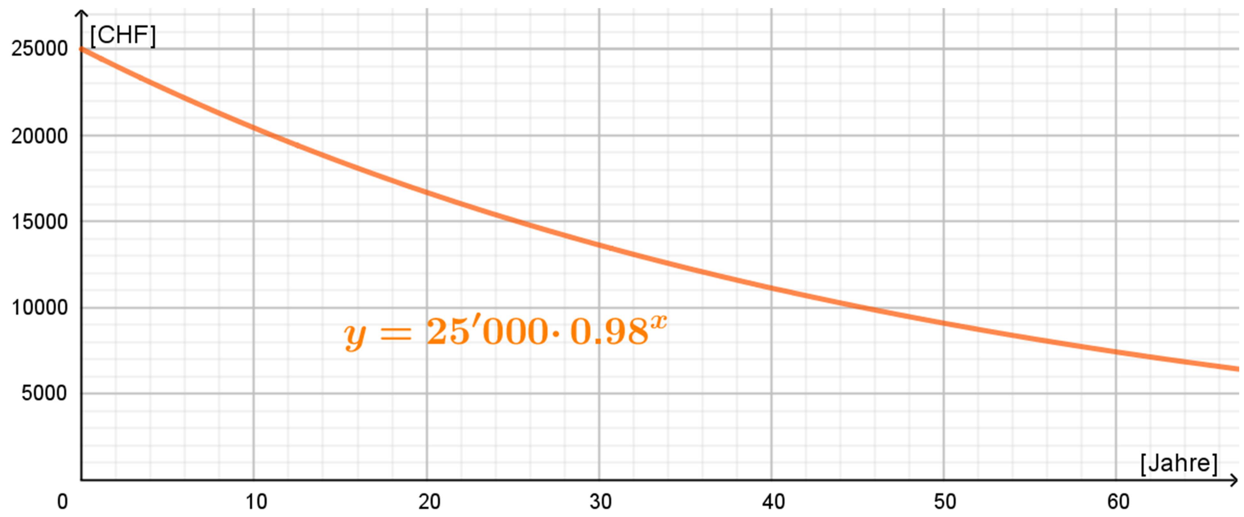
Anfangswert:	25'000 CHF
Wachstumsfaktor:	$\cdot 0.98$

a) Funktionsgleichung: $y = 25'000 \cdot 0.98^x$

Das Wachstum ist exponentiell abnehmend.

b) $y_{11} = 25'000 \cdot 0.98^{11} \approx 20'018.28$ Nach 11 Jahren beträgt die Restschuld etwa 20'018 CHF.

c) $y_{50} = 25'000 \cdot 0.98^{50} \approx 9'104.24$ Nach 50 Jahren beträgt die Restschuld etwa 9'104 CHF.



7. Ein Auto hat einen Neuwert von 84‘000 CHF. Der Wert verringert sich pro Jahr um 11%.
   a) Funktionsgleichung und Wachstumsart?
   b) Wie gross ist der Wert nach 20 Jahren?
   c) Nach wie vielen Jahren ist der BMW nur noch halb so viel wert wie zu Beginn?

Anfangswert: 84'000 CHF

Wachstumsfaktor: $\cdot 0.98$

a) Funktionsgleichung: $y = 84'000 \cdot 0.89^x$

Das Wachstum ist exponentiell abnehmend.

b) $y_{20} = 84'000 \cdot 0.89^{20} \approx 8'167.31$ Nach 20 Jahren beträgt der Restwert etwa 8'167 CHF.

c) Probieren durch Einsetzen $\rightarrow$ Nach 6 Jahren hat der BMW noch die Hälfte des Wertes.

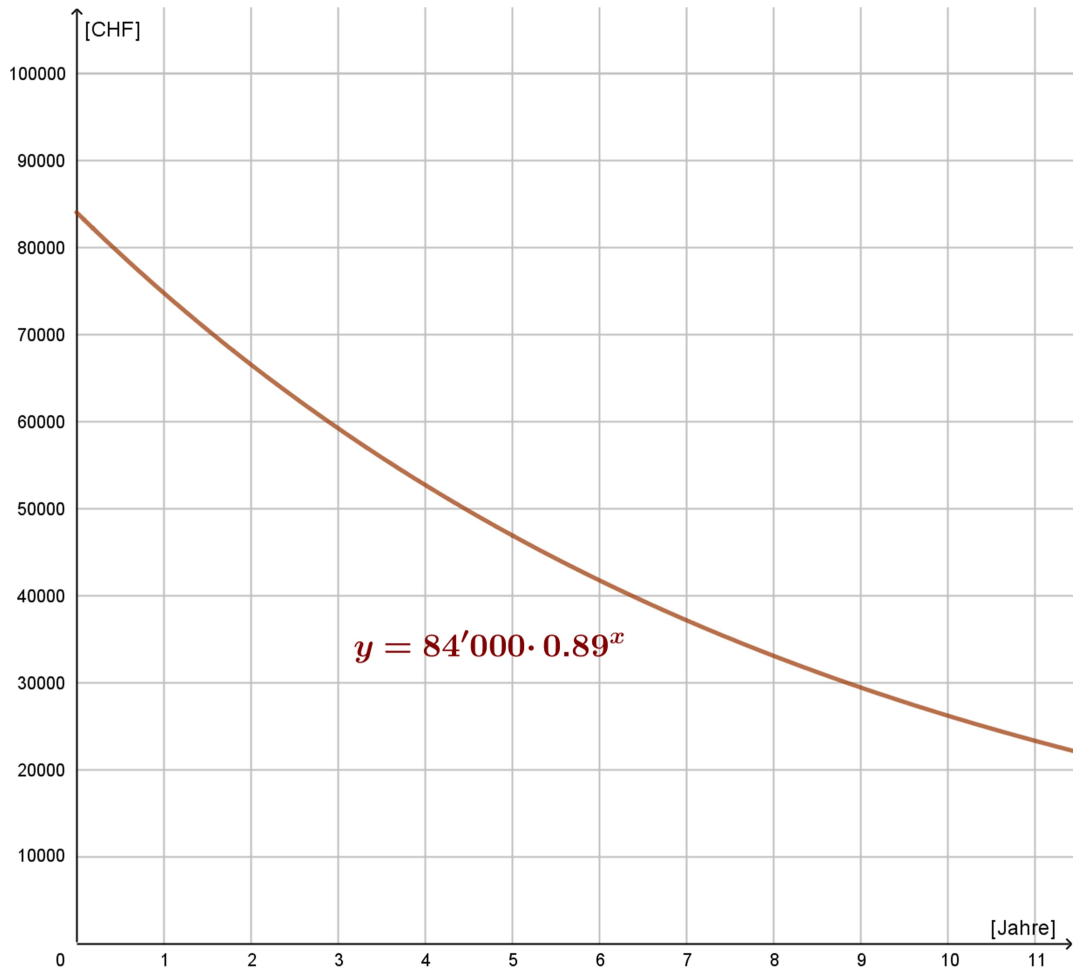
Mit Logarithmus:

$$42'000 = 84'000 \cdot 0.89^x \quad \Big| : 84'000$$

$$0.5 = 0.89^x \quad \Big| \log$$

$$\log(0.5) = x \cdot \log(0.89) \quad \Big| : \log(0.89)$$

$$\frac{\log(0.5)}{\log(0.89)} = x \approx 5.95$$ $\rightarrow$ Nach 6 Jahren hat der BMW noch die Hälfte des Wertes.

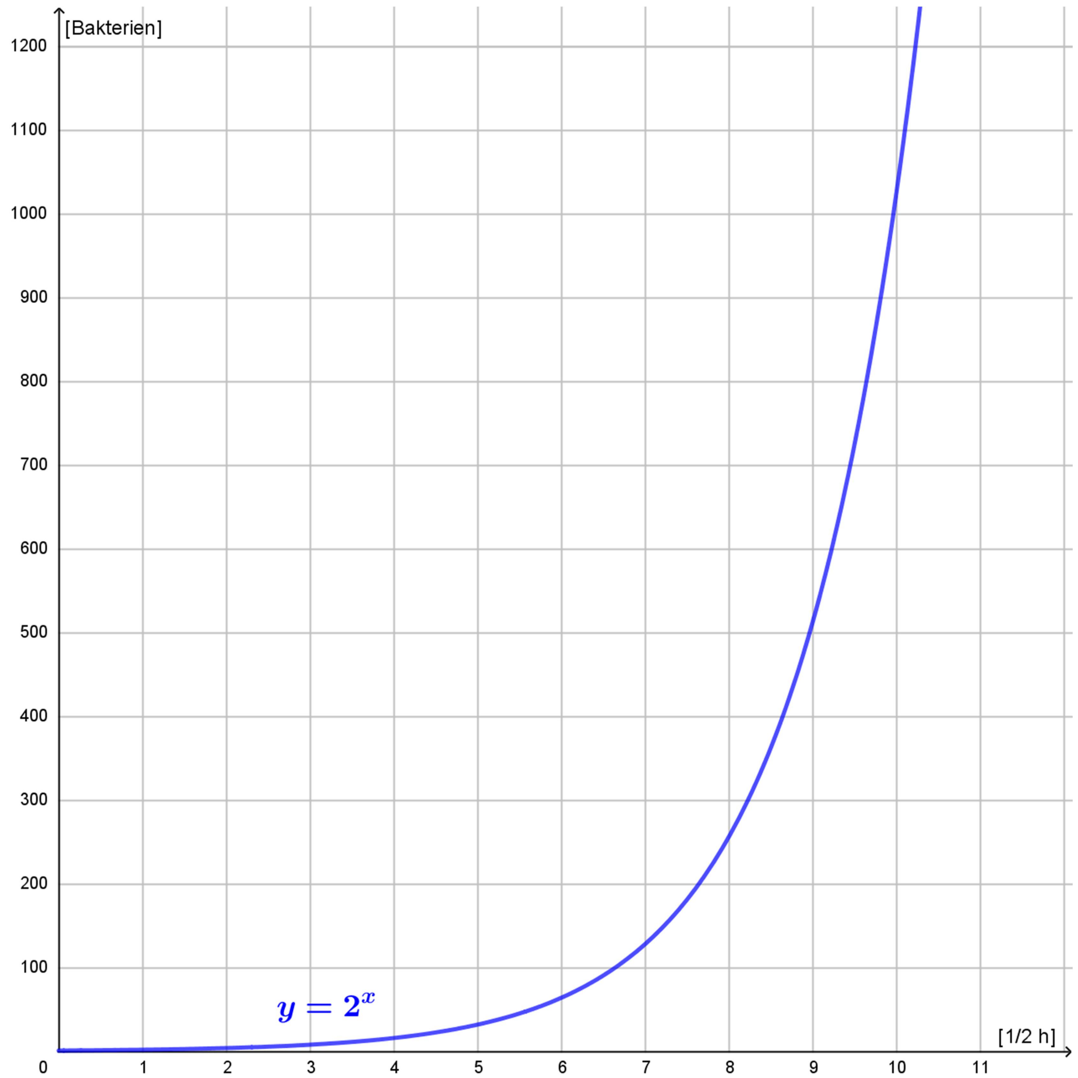


8. Eine Bakterienkultur besteht zu Anfang aus 1 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 30 Minuten.
   a) Funktionsgleichung und Wachstumsart?
   b) Wie viele Bakterien hat man nach 24 Stunden?

Anfangswert: 1 Bakterie
Wachstumsfaktor: $\cdot 2$

a) Funktionsgleichung: $y = 1 \cdot 2^x$ oder $y = 2^x$
Das Wachstum ist exponentiell zunehmend.

b) $y_{24} = 2^{48} = 281'474'976'710'656$ Bakterien sind nach 24 Stunden am Leben.



9. Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1.5%. Derzeit beträgt sie 12 Millionen.
   a) Funktionsgleichung und Wachstumsart?
   b) Wie gross wird die Bevölkerung in 10 Jahren sein?

Anfangswert: 12 Mio Menschen

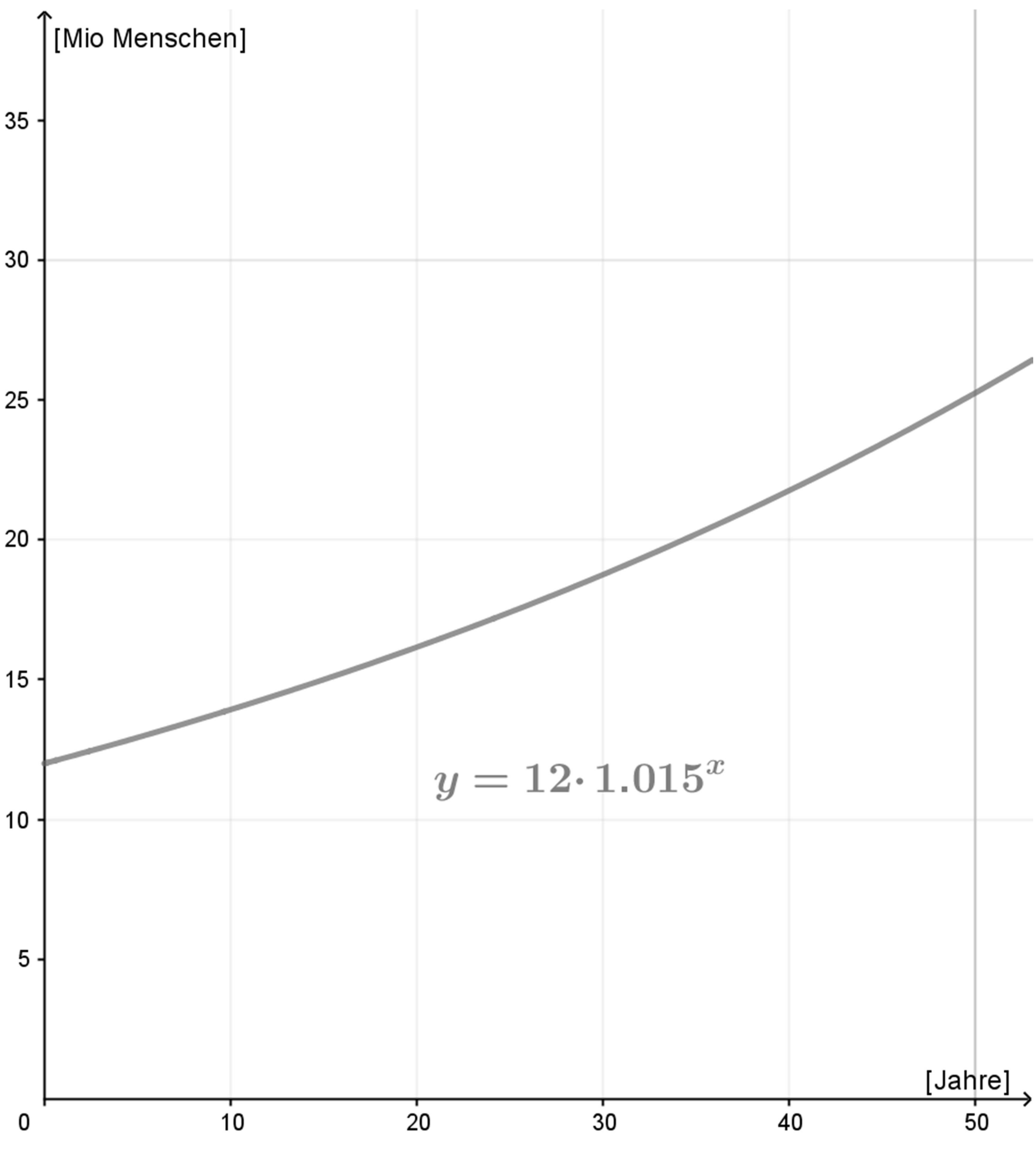
Wachstumsfaktor: $\cdot 1.015$

a) Funktionsgleichung: $y = 12'000'000 \cdot 1.015^x$

Das Wachstum ist exponentiell zunehmend.

b) $y_{10} = 12'000'000 \cdot 1.015^{10} \approx 13'926'489.90$

$\rightarrow$ Nach 10 Jahren leben etwa 13.9 Millionen Menschen im Land.



10. Ein Lichtstrahl, der ins Wasser fällt, wird pro Meter Wassertiefe um 10% schwächer.
    a) Funktionsgleichung und Wachstumsart?
    b) Wie stark ist das Licht in 10 m Tiefe in Prozent?
    c) In wie vielen Metern hat man weniger als 1 % der Lichtstärke?

Anfangswert: 100 %
Wachstumsfaktor: $\cdot 0.9$

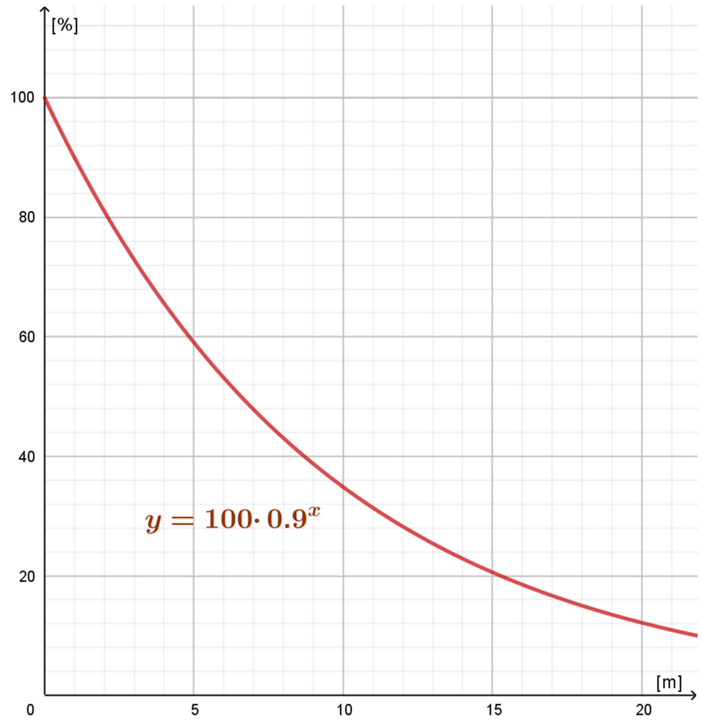
a) Funktionsgleichung: $y = 100 \cdot 0.9^x$
Das Wachstum ist exponentiell abnehmend.

b) $y_{10} = 100 \cdot 0.9^{10} \approx 34.87\,\%$
$\rightarrow$ In 10 Metern Tiefe beträgt die Lichtstärke etwa 35 %.

c) Probieren durch Einsetzen $\rightarrow$
mit Logarithmus:

$$\begin{aligned}
1 &= 100 \cdot 0.9^x && \big| :100 \\
0.01 &= 0.9^x && \big| \log \\
\log(0.01) &= x \cdot \log(9) && \big| :\log(9) \\
\frac{\log(0.01)}{\log(9)} &= x \approx 43.71
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ In etwa 44 Metern Tiefe beträgt die Lichtstärke noch 1 %.



11. Suche die Gesetzmässigkeiten und fülle die Tabelle aus. Runde auf jeweils zwei Dezimalstellen

a)

x	1	2	3	4	20
y	1	8	27	**64**	**8‘000**

Art des Wachstums: **exponentiell**

Funktionsgleichung: **$y = x^3$**

b)

x	1	2	3	4	1111
y	41	45	49	**53**	**4481**

Immer **+4**, d.h. die **Steigung** ist **4**

bei **x = 0** ist **y = 37**, d.h. der **y-Achsenabschnitt ist 37**

Art des Wachstums: **linear**

Funktionsgleichung: **$y = 4x + 37$**

c)

x	0	1	2	3	4
y	160‘000	40‘000	10‘000	**2‘500**	**625**

Immer :4, bzw. **·1/4**

Art des Wachstums: **exponentiell**

Funktionsgleichung: **$y = 160'000 \cdot 0.25^x$**

d)

x	1	2	3	4	111
y	25	36	49	**64**	**13‘225**

Es sind alles Quadratzahlen, nur ist der x-Wert immer vier zu klein.

Art des Wachstums: **exponentiell, quadratisch**

Funktionsgleichung: **$y = (x + 4)^2$**